

5c. Il teorema di Bayes

Nella moderna teoria della probabilità per ricavare il teorema di Bayes sono sufficienti alcune definizioni e pochi passaggi. Innanzitutto la probabilità marginale che si verifichi l'evento A, che è indicata con

$$P(A) \quad (5.5)$$

Dal punto di vista numerico la probabilità di un evento è un numero positivo compreso tra 0 (evento che non accade mai) e 1 (evento certo) ovvero

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad (5.6)$$

Corollario: la probabilità che non si verifichi l'evento A è

$$P(\text{non}A) = 1 - P(A) \quad (5.7)$$

La probabilità condizionata

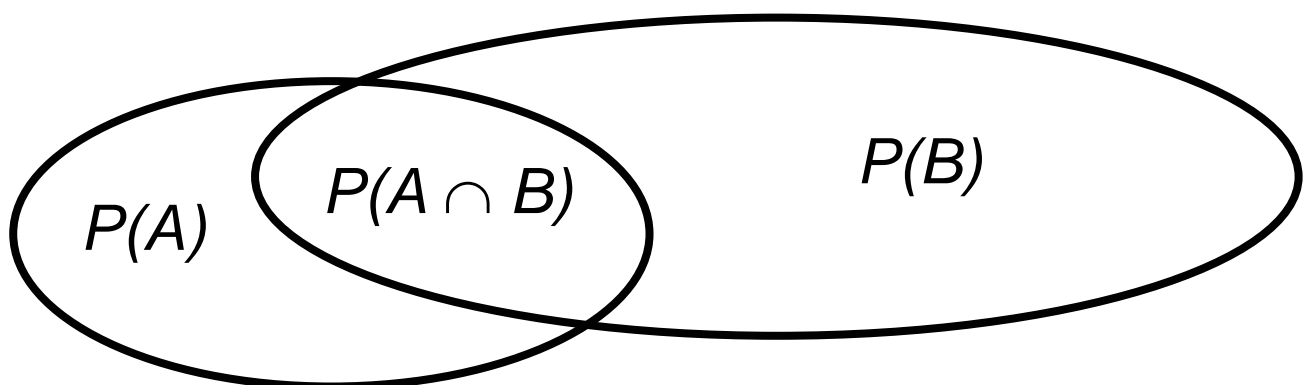
$$P(A/B) \quad (5.8)$$

è la probabilità di un evento A condizionata ad un evento B, ovvero è la probabilità che si verifichi A a condizione che si sia verificato B e si legge “la probabilità di A, dato B” ovvero “la probabilità di A condizionata a B”

La probabilità congiunta

$$P(A \cap B) \quad (5.9)$$

è la probabilità di due eventi congiunti, ovvero è la probabilità che si verifichino sia A sia B, e si legge “la probabilità congiunta di A e B” ovvero “la probabilità di A e B”. La probabilità congiunta può essere meglio compresa facendo riferimento al diagramma seguente.



La relazione fra probabilità condizionata e probabilità congiunta è la seguente:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \quad (5.10)$$

ma deve essere anche

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) \quad (5.11)$$

(perchè, intuitivamente, dobbiamo avere lo stesso risultato sia partendo da A sia partendo da B) e, combinando la (5.10) con la (5.11), si ottiene il teorema delle probabilità composte :

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A) \quad (5.12)$$

Dal precedente teorema si ricava il teorema di Bayes:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (5.13)$$

Se poniamo $A = \text{la causa}$, e $B = \text{l'effetto}$, il teorema di Bayes suona così

$$P(\text{della causa}/\text{dato l'effetto}) = \frac{P(\text{dell'effetto}/\text{data la causa}) \cdot P(\text{della causa})}{P(\text{dell'effetto})} \quad (5.14)$$

E finalmente se consideriamo il problema specifico della diagnostica medica, e poniamo $A = \text{la malattia [la causa]}$, e $B = \text{il segno [l'effetto]}$, il teorema di Bayes suona così

$$P(\text{della malattia}/\text{dato il segno}) = \frac{P(\text{del segno}/\text{data la malattia}) \cdot P(\text{della malattia})}{P(\text{del segno})} \quad (5.15)$$