## 6a. Teorema di Bayes e valore predittivo di un test di laboratorio

Per modellizzare il teorema di Bayes nel campo della diagnostica di laboratorio, dobbiamo innanzitutto costruirci una tabella nella quale riassumere i risultati di un test quantitativo, considerando una classificazione dicotomica tra soggetto malato (indicato con M+) e soggetto sano (indicato con M-) e tra risultato positivo del test (indicato con T+) e risultato negativo del test (indicato con T-).

| | T+ | T- |
|---|---|---|
| M+ | T+M+ | T-M+ |
| M- | T+M- | T-M- |

L'obiezione che in una classificazione dicotomica si perde il senso del risultato numerico viene superata dal fatto che il valore soglia tra T+ e T- può essere variato in continuo "ad-hoc" (lo vedremo successivamente nella parte riservata a teorema di Bayes e strategie diagnostiche).

Definiamo come *sensibilità* la positività del test nei malati (una sensibilità del 100% significa che il test è positivo nel 100% dei malati, una sensibilità del 90% significa che il test è positivo nel 90% dei malati, e così via).

Definiamo come *specificità* la negatività del test nei sani (una specificità del 100% significa che il test è negativo nel 100% dei sani, una specificità del 90% significa che il test è negativo nel 90% dei sani, e così via).

Definiamo infine come *prevalenza* della malattia il numero dei soggetti malati presenti, in un dato istante, nella popolazione (una prevalenza del 5 per mille significa che il 5 per mille delle persone è affetto dalla malattia, e così via).

Esprimendo queste grandezze in termini di probabilità abbiamo le definizioni

| | T+ | T- |
|---|---|---|
| M+ | *P(T+M+)*<br>[sensibilità] | *P(T-M+)*<br>[1 – sensibilità] |
| M- | *P(T+M-)*<br>[1 – specificità] | *P(T-M-)*<br>[specificità] |

(6.1)

Alle due principali grandezze, la sensibilità e la specificità, ne va aggiunta un terza, la prevalenza P(M+), cioè il numero di soggetti che hanno la specifica malattia presenti, in un dato istante, nella popolazione (in base alla (5.7) sarà P(M-) = 1 – P(M+) il numero di soggetti che <u>non</u> hanno la specifica malattia presenti, in un dato istante, nella popolazione).

Nel caso di due situazioni mutuamente esclusive (<u>affetto</u> o <u>non affetto</u> dalla malattia A) il teorema di Bayes (5.13) può essere espresso anche nella forma

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|nonA) \cdot P(nonA)} \qquad (6.2)$$

che, sostituendo *A* con *M+* e sostituendo *B* con *T+*, può essere riscritta come

$$P(M+|T+) = \frac{P(T+|M+) \cdot P(M+)}{\phantom{P(T+|M+) \cdot P(M+)}} \qquad (6.3)$$

$$P(T+|M+) \cdot P(M+) + P(T+|M-) \cdot P(M-)$$

e, decodificando le grandezze mediante la (6.1), letta come

$$P(M+|T+) = \frac{\text{sensibilità} \cdot \text{prevalenza}}{\text{sensibilità} \cdot \text{prevalenza} + (1 - \text{specificità}) \cdot (1 - \text{prevalenza})} \qquad (6.4)$$

La probabilità che un test sia positivo data la malattia, *P(T+|M+)* che si trova sulla destra dell'espressione (6.3) deve essere letta come la <u>probabilità dell'effetto</u> (risultato positivo del test) <u>data la causa</u> (la malattia).

La *probabilità che la malattia sia presente in un soggetto con un test positivo, P(M+|T+)*, che si trova sulla sinistra dell'espressione (6.3) e della (6.4), deve essere letta come la <u>probabilità della causa</u> (la malattia) <u>dato l'effetto</u> (risultato positivo del test), ed è definita come il <u>valore predittivo del test positivo</u>.

La *patologia medica* insegna come si comportano <u>i segni data la malattia</u> (l'effetto data la causa). Ci insegna ad esempio che nell'epatite virale di tipo A è presente un aumento moderato delle transaminasi.

La *clinica medica*, insegna a diagnosticare <u>la malattia dati i segni</u> (la causa dato l'effetto). Un soggetto con aumento moderato delle transaminasi, che probabilità ha di essere affetto da una epatite A?

Il *teorema di Bayes* consente, conoscendo la prevalenza di una malattia, e la sensibilità e la specificità di un test per la sua diagnosi, di calcolare la probabilità di malattia in caso di test positivo (o la probabilità di assenza della malattia in caso di test negativo). Consente, in altre parole, il passaggio dalla patologia medica alla clinica medica, e fornisce le basi della razionalità della diagnostica di laboratorio e, a un livello superiore, della decisione medica.

Reciprocamente in questa forma del teorema di Bayes

$$P(M-|T-) = \frac{P(T-|M-) \cdot P(M-)}{P(T-|M-) \cdot P(M-) + P(T-|M+) \cdot P(M+)} \qquad (6.5)$$

che, decodificando le grandezze mediante la (6.1), può essere letta come

$$P(M-|T-) = \frac{\text{specificità} \cdot (1 - \text{prevalenza})}{\text{specificità} \cdot (1 - \text{prevalenza}) + (1 - \text{sensibilità}) \cdot \text{prevalenza}} \qquad (6.6)$$

la *probabilità che la malattia sia assente in un soggetto con un test negativo, P(M-|T-)*, che si trova sulla sinistra dell'espressione, è definita come il <u>valore predittivo del test negativo</u>.