Errori cognitivi, probabilità e decisioni mediche nella diagnostica di laboratorio

M. Besozzi - IRCCS Istituto Auxologico Italiano

L'argomento...

- Errori cognitivi
- Il problema gnoseologico
- Dati, informazione e conoscenza
- Complessità, probabilità e teorema di Bayes
- Teorema di Bayes e informazione diagnostica
- Teorema di Bayes e strategie diagnostiche
- Teorema di Bayes e decisioni mediche

“Il concetto di probabilità
è il più importante della scienza moderna,
soprattutto perché nessuno
ha la più pallida idea del suo significato.”

(Bertrand Russel)

“La probabilità: chi è costei?
Prima di rispondere a tale domanda è certamente opportuno chiedersi: ma davvero “esiste” la probabilità? e cosa mai sarebbe?
Io risponderei di no, che non esiste.”

(Bruno de Finetti)

Come possiamo conoscere

L’accuratezza delle regole

Il problema nasce quando
le regole
si ignorano/sono sbagliate
o non sono applicate correttamente
mentre
le regole
si devono conoscere/devono essere giuste
devono essere applicate correttamente

	Lo strumento di previsione	***Utilizzo di dati misurabili***	***Il livello cui si applica***	***La previsione***
Magia	Intuizione	No	Macroscopico	Apparentemente “certa”, se si accettano in modo fideistico previsioni del mago. Ma si può dimostrare che anche i migliori maghi sbagliano.
Scienza	Modello matematico deterministico	Si	Macroscopico	“Certa” in riferimento ad eventi come il moto degli astri nelle orbite determinate dalla legge di gravitazione, e a *quasi tutte* le leggi che governano il mondo macroscopico.
	Modello matematico probabilistico	Si Si	Macroscopico Microscopico	“Probabilistica” in riferimento ad eventi complessi come la circolazione dell’atmosfera (previsioni del tempo). “Probabilistica” in riferimento agli eventi che caratterizzano elementi ultimi che costituiscono la materia/energia (teoria atomica e teoria dei quanti).

La domanda	***Lo strumento di previsione***	***La previsione***
Testa o croce?		
	La magia	Può sembrare che funzioni
	La risposta deterministica (*conclusione “certa”*)	Funziona solo se la moneta è truccata (in questo caso lanciando in un modo particolare la moneta è possibile ottenere “deterministicamente” (con certezza) un certo risultato.
	La risposta probabilistica (*conclusione “probabile”*)	Ci consente di affermare che, se il risultato di un singolo lancio è imprevedibile (legato al caso), a lungo andare metà delle volte uscirà testa e l’altra metà delle volte uscirà croce (necessità), e di esprimere quindi il risultato del lancio della moneta in termini di probabilità (la probabilità che in un dato lancio esca testa è identica alla probabilità che esca croce, ed è *p = 0,5*)

La domanda	***Lo strumento di previsione***	***La previsione***
Domani pioverà?		
	Intuizione (*magia*)	Può sembrare che funzioni.
	Modello matematico “deterministico” (*conclusione “certa”*)	Non è possibile.
	Modello matematico “probabilistico” (*conclusione “probabile”*)	Ci consente di affermare che (ad esempio) domani c’è il 90% di probabilità che faccia bello e il 10% di *probabilità* che piova, rinunciando peraltro alla *certezza* di sapere se domani sarà uno dei 90 giorni che fa bello o piuttosto uno dei 10 giorni che pioverà.

Probabilità

- G. Cardano (1501-1576)
  De ludo aleae

- G. Galilei (1564-1642)
  Sopra le scoperte de li dadi

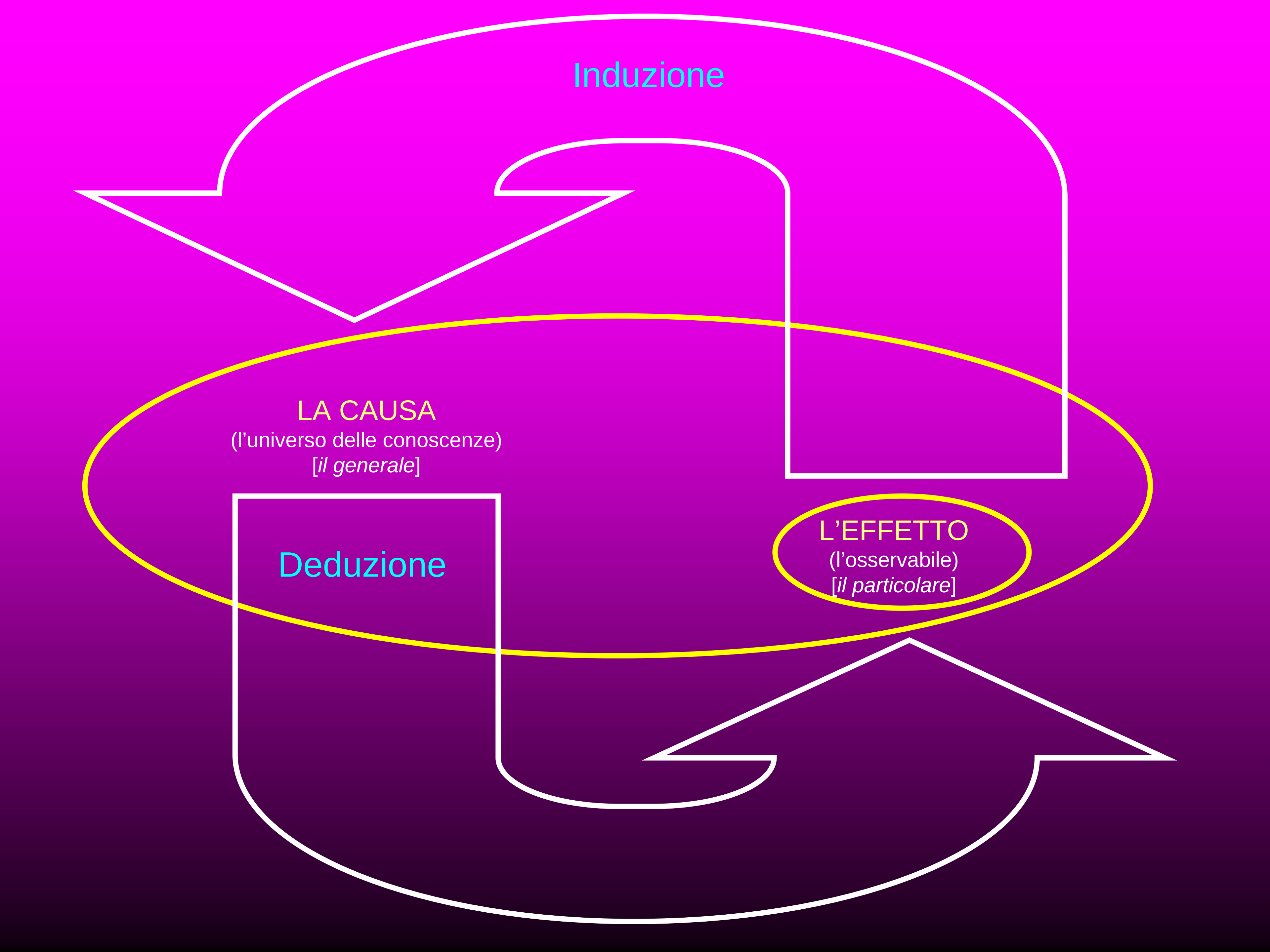
(le prime nozioni)

Probabilità

(le questioni poste dal cavaliere De Merè)

- B. Pascal (1623-1662)
- P. De Fermat (1601-1665)

(le origini del calcolo delle probabilità)


Induzione
LA CAUSA
(l’universo delle conoscenze)
[*il generale*]
Deduzione
L’EFFETTO
(l’osservabile)
[*il particolare*]

Probabilità: il problema classico

Abbiamo un’urna contenente 500 palline
di colore bianco e 500 palline di colore rosso.
Cosa ci possiamo attendere
dall’estrazione di una pallina?
Si sa tutto sull’urna, ovvero si conosce “l’universo”,
ovvero si conosce la causa.
Si applica un ragionamento deduttivo.
Il risultato (l’effetto, l’estrazione di una pallina)
può essere calcolato.

(l’aspetto induttivo e l’aspetto deduttivo compaiono nella probabilità)

Probabilità: il problema inverso

Da un'urna contenente *s* palline estraiamo *n* palline di cui *k* sono di colore rosso.
Cosa possiamo concludere circa il contenuto dell'urna?
Si è fatto un esperimento, si conosce l'effetto.
Il problema che Bayes si pone è: esiste un qualche ragionamento induttivo che ci consenta di "calcolare" la causa (lo specifico contenuto dell'urna)?

(per questo il teorema di Bayes è noto anche come il teorema della probabilità delle cause)

La soluzione compare in...

Reverend Thomas Bayes : An assay toward solving a problem in the doctrine of chance. Philo. Trans. Roy. Soc., vol. 53, 370-418, 1763.

- il saggio è pubblicato dall'amico Richard Price due anni dopo la morte di Thomas Bayes (1702-1761)
- il matematico francese Pierre-Simon Laplace (1749-1827) replica ed estende questo risultato in un saggio del 1774, apparentemente ignaro dei risultati di Bayes

Probabilità: il problema inverso

Da un'urna contenente *s* palline estraiamo *n* palline di cui *k* sono di colore rosso.
Cosa possiamo concludere circa il contenuto dell'urna?

Probabilità: il problema inverso

Da un’urna contenente *s* palline estraiamo *n* palline di cui *k* sono di colore rosso.
Cosa possiamo concludere circa il contenuto dell’urna?
Il trucco sta nel porre la domanda giusta, che è:
quale è la probabilità che la prossima pallina sia di colore rosso?

Probabilità: il problema inverso

Da un'urna contenente *s* palline estraiamo *n* palline di cui *k* sono di colore rosso.
Cosa possiamo concludere circa il contenuto dell'urna?
Il trucco sta nel porre la domanda giusta, che è:
quale è la probabilità che la prossima pallina sia di colore rosso?

Risposta: $P = (k + 1) / (n + 2)$

Probabilità: il problema inverso

Bayes e Laplace rispondono in questo modo
in linguaggio matematico
anche al (classico) problema di Hume:

sorgerà il sole domani?

Risposta: $P = (n + 1) / (n + 2)$

La probabilità

1. Definizione classica

"La probabilità è il rapporto fra il numero di eventi favorevoli e il numero di eventi possibili, essendo questi ultimi tutti equiprobabili"

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

La probabilità

1. Definizione classica

"La probabilità è il rapporto fra il numero di eventi favorevoli e il numero di eventi possibili, essendo questi ultimi tutti equiprobabili"

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

(nella definizione è contenuto un vizio logico: quale?)

La probabilità

2. Definizione frequentista

"*La probabilità di un evento è il rapporto fra il numero di esperimenti in cui esso si è verificato e il numero totale di esperimenti eseguiti nelle stesse condizioni, essendo tale numero opportunamente grande*"

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

La probabilità

3. Definizione soggettiva

“...la probabilità che qualcuno attribuisce alla verità - o al verificarsi - di un certo evento (fatto singolo univocamente descritto e precisato) altro non è che la misura del grado di fiducia nel suo verificarsi”

Un esempio...

Immaginiamo una partita di calcio per la quale gli eventi possibili sono:

- la vittoria della squadra di casa;
- la vittoria della squadra ospite;
- il pareggio.

Un esempio...

Secondo la teoria classica esiste 1 probabilità su 3 che avvenga la vittoria della squadra di casa.

Secondo la teoria frequentista ci si può dotare di un almanacco, controllare tutte le partite precedenti e calcolare la frequenza di un evento.

Secondo la teoria soggettiva, ci si può documentare sullo stato di forma dei calciatori, sul terreno di gioco e così via fino ad emettere un giudizio di probabilità soggettiva.

La probabilità

L'impostazione assiomatica della probabilità venne proposta da Andrey Nikolaevich Kolmogorov nel 1933 in *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Concetti fondamentali del calcolo delle probabilità*), sviluppando la ricerca che era ormai cristallizzata sul dibattito fra quanti consideravano la probabilità come limiti di frequenze relative (impostazione frequentista) e quanti cercavano un fondamento logico della stessa. La sua impostazione assiomatica si mostrava adeguata a prescindere dall'adesione a una o all'altra scuola di pensiero.

La probabilità

4. Definizione assiomatica

"*La probabilità assiomatica è una funzione d'insieme* ***P*** *definita sullo spazio degli eventi* ***S****, ovvero è una legge in grado di assegnare ad ogni evento* ***E*** *appartenente ad* ***S*** *un numero che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov:*

1) la probabilità ***P(E)*** *di un evento* ***E*** *è un numero reale non negativo;*

2) la probabilità ***P(U)*** *dell'evento certo è 1;*

3) la probabilità di un evento complesso costituito dal verificarsi dell'evento elementare ***A*** *o dell'evento elementare* ***B****, mutuamente incompatibili, è la somma delle probabilità di* ***A*** *e di* ***B****:* ***P(A*** *o* ***B)*** *=* ***P(A)*** *+* ***P(B)***"

La probabilità

4. Definizione assiomatica

Ovvero più in breve...

“*La probabilità è un numero compreso tra 0 (evento impossibile) e 1 (evento certo) che soddisfa i tre assiomi di Kolmogorov*”

La probabilità: definizioni di base

Probabilità che si verifichi l'evento A

$P(A)$ = probabilità marginale dell'evento A

Dal punto di vista numerico la probabilità di un evento è un numero positivo compreso tra 0 (evento che non accade mai) e 1 (evento certo) ovvero $0 \leq P(A) \leq 1$

Corollario

Probabilità che non si verifichi l'evento A

$P(\text{non-}A) = 1 - P(A)$

La probabilità condizionata

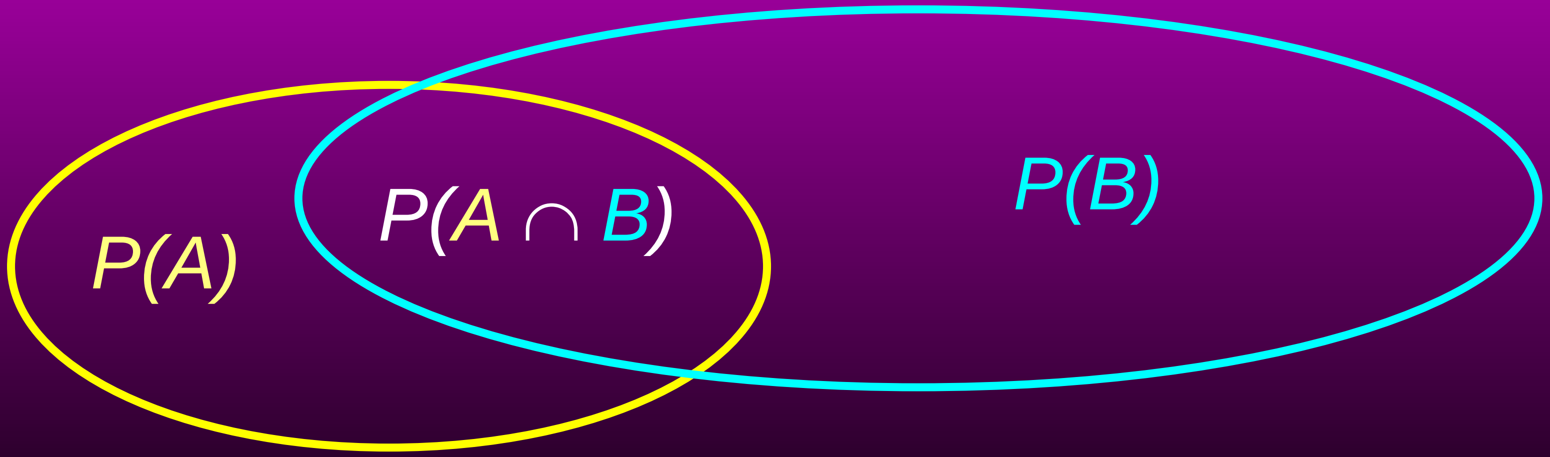
$P(A|B)$

E' la probabilità di un evento A <u>condizionata</u> ad un evento B, ovvero è la probabilità che si verifichi A una volta che si sia verificato B e si legge
"la probabilità di A, dato B" ovvero
"la probabilità di A condizionata a B"

La probabilità congiunta

$P(A \cap B)$

E' la probabilità di due eventi congiunti, descrive la situazione in cui si verificano sia A sia B,
si legge "la probabilità congiunta di A e B"
ovvero "la probabilità di A e B"



Probabilità composte (teorema)

Le relazione fra probabilità condizionata e probabilità congiunta è la seguente:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

ma deve essere anche

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

(perchè, intuitivamente, dobbiamo avere lo stesso risultato sia partendo da A sia partendo da B)

Probabilità composte (teorema)

Le relazione fra probabilità condizionata e probabilità congiunta è quindi la seguente:

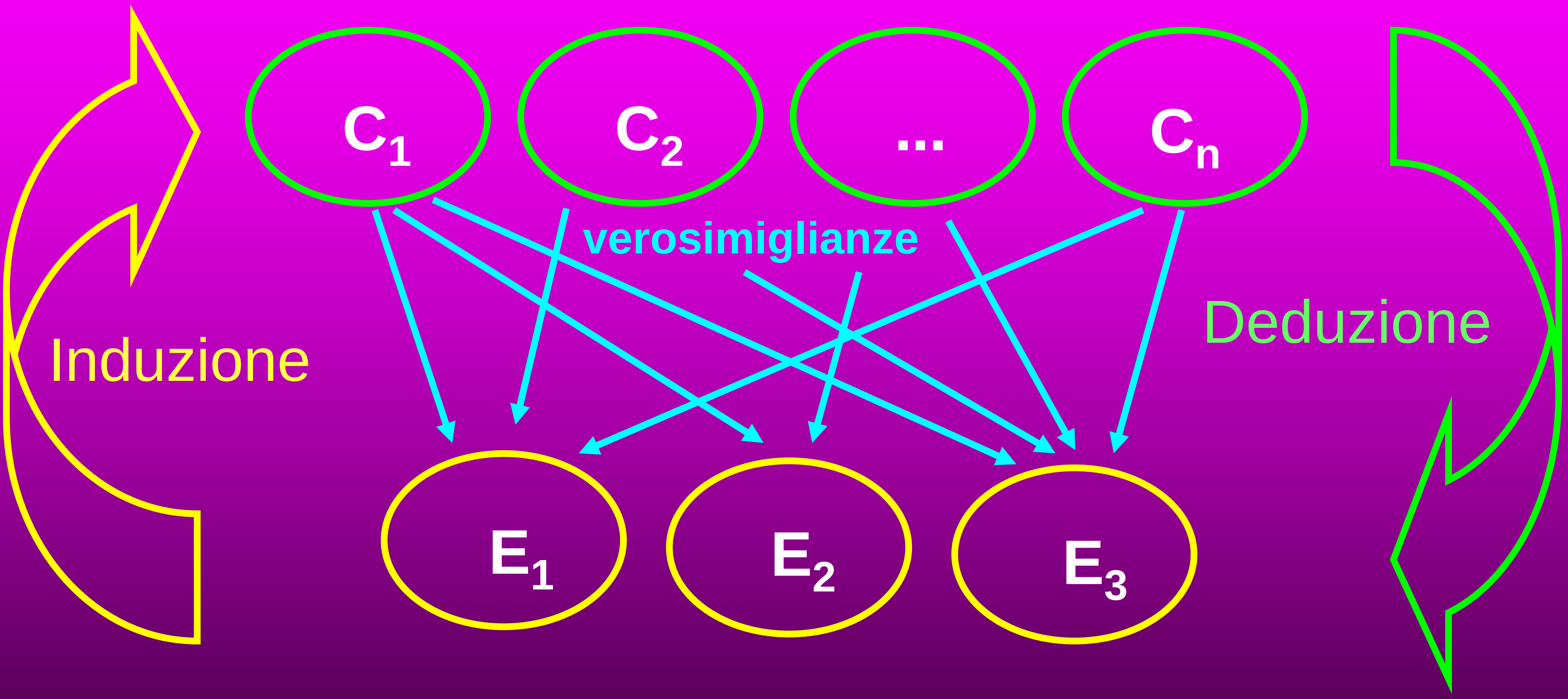
$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Da cui si ricava il teorema di Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

(il teorema prende il nome dal reverendo inglese che lo ha scoperto nel 1700 studiando il problema inverso...)

La probabilità delle cause



(l’aspetto induttivo e l’aspetto deduttivo compaiono nella probabilità)

Il teorema di Bayes in medicina...

(la causa | dato l'effetto)

(l'effetto | data la causa)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|non\ A) \cdot P(non\ A)}$$

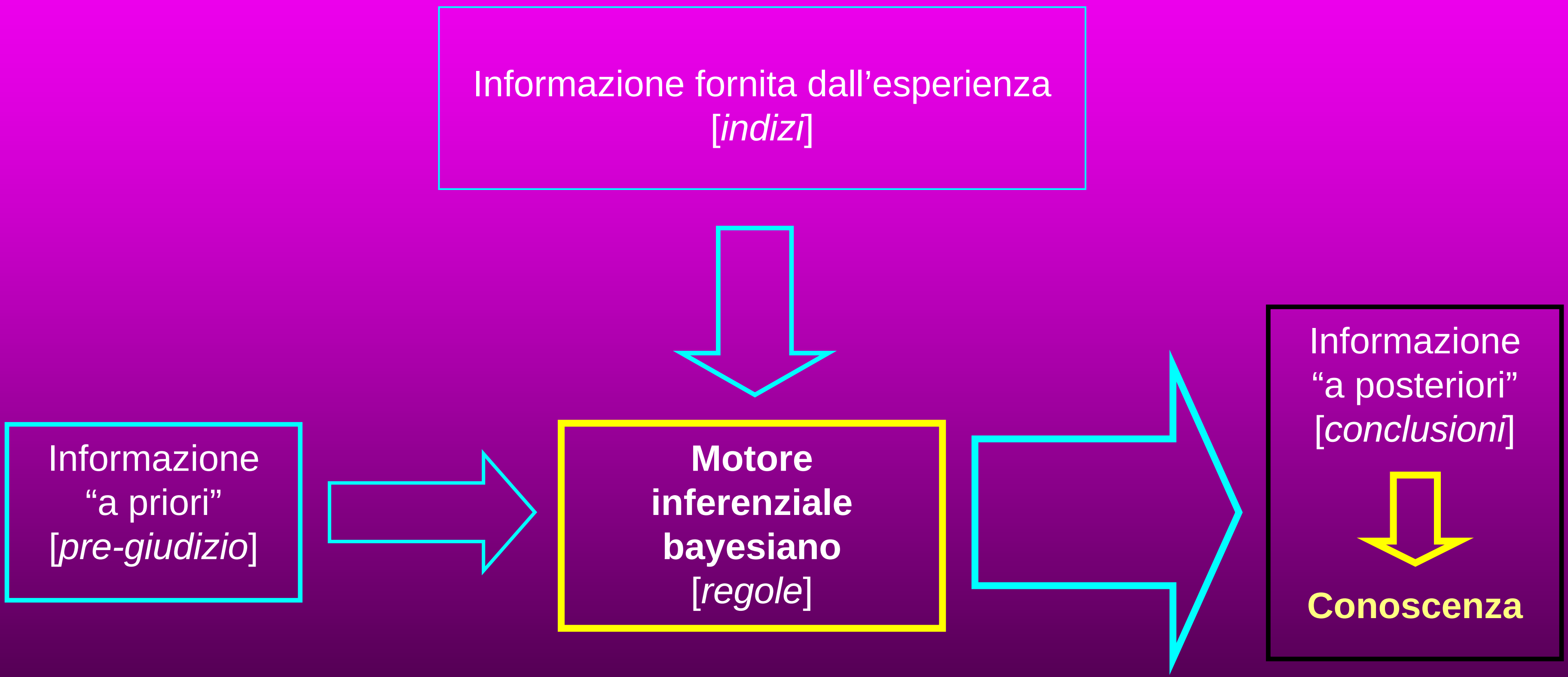
Probabilità

(questa particolare espressione del teorema è utile per esprimere i risultati di due situazioni mutuamente esclusive come affetto ovvero non affetto dalla malattia A)

... e nella ricerca scientifica

Lo schema di aggiornamento
del grado di fiducia
mediante il meccanismo bayesiano
pregiudizio + indizi >> conclusioni
è molto simile a
quello utilizzato comunemente
nella ricerca scientifica.

4. Dati, informazione, conoscenza



(aggiungono al falsificazionismo di Popper la misura del contributo dell’esperimento in termini di aumento della verosimiglianza)